四庫全書

子部

欽定四庫全書

子部

幾何論約卷一之首至三

詳校官欽天監天文生臣司廷棟

靈臺郎臣倪廷梅覆勘

總校官降調編修臣倉聖脉

校對官五官靈臺郎臣陳際新

謄錄監生臣王宮

繪圖監生臣林臯

幾何論約　　天文算法類二 算書之屬

提要

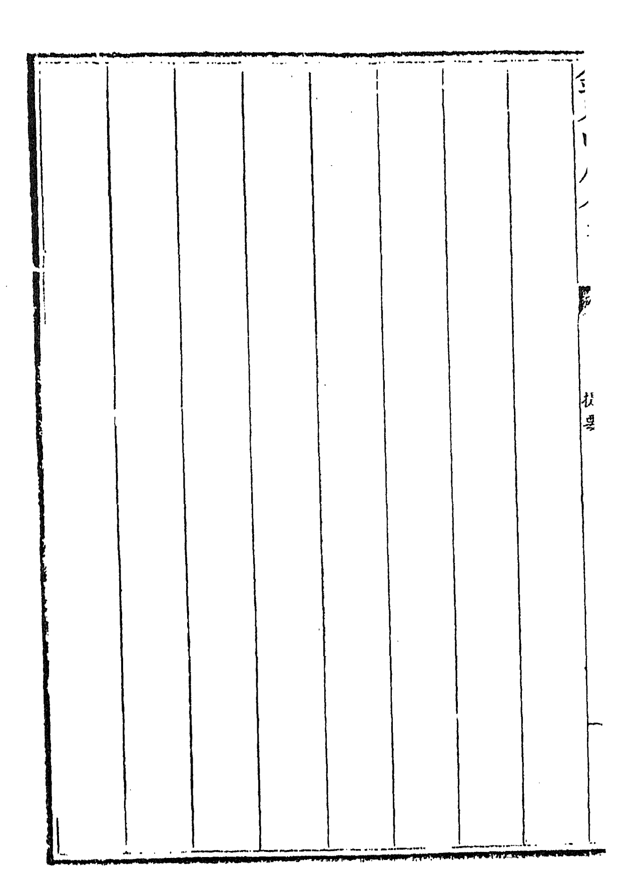
臣等謹案幾何論約七卷

國朝杜知耕撰知耕字臨甫號伯瞿柘城人是編取利瑪竇與徐光啟所譯幾何原本復加刪削故名曰論約考光啟於幾何原本之首冠雜議數條有云此書有四不必不必疑不

必揣不必試不必改有四不可得欲脫之不可得欲駁之不可得欲滅之不可得欲前後更置之不可得知耕乃刊削其文似乎蹈光啟之所戒然讀古人書者往往各有所會心當其獨契不必喻諸人人併不必印諸著書之人幾何原本十五卷光啟取其六卷薩幾里得以絕世之執傳其國遞校之秘法其果有九卷之冗贅待光啟去取乎亦各取其所

欲取而已知耕之取所欲取不足異也梅文鼎筭術造微而所著幾何摘要亦有所去取於其間且稱知耕是書足以相證則是書之删繁舉要必非漫然矣乾隆四十六年九月恭校上

總纂官臣紀昀臣陸錫熊臣孫士毅
總校官臣陸費墀



原序

凡物之生有理有形有數三者妙於自然不可言合何有於分顧從来語格物者毎詳求理而畧形與數其於數雖有九章之術求其精確已苦無傳書至論物之形則絶無及者盖孟子曰繼之以規矩準繩以為方圓平直不可勝用意古者公輸墨翟之流未嘗不究心於此而特未及勒為一家之言與然不可考矣嘗竊論之理為物原數為物紀而形為物質形也者理數之相

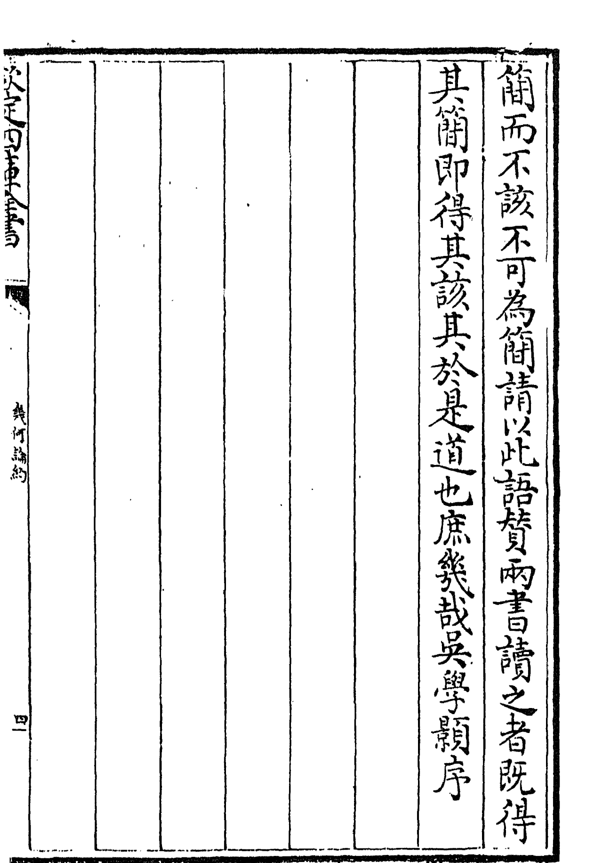
附以立者也得形之所以然則理與數皆在其中不得其形則數有窮時而理亦杳渺而不安非理之不足恃葢離形求理則意與象睽而理為無用即形求理則道與器合而理為有本也幾何原本一書創於西洋歐吉里斯自利瑪竇攜入中國而上海徐元扈先生極為表章譯以華文中國人始得讀之其書囊括萬象包羅諸有以為物之形有短長有濶狹有厚薄短長曰線濶狹曰面厚薄曰體以三者提其大綱而曲直相參斜

正相求方員相準多寡相較輕重相衡以虛例實用小該大自近測遠參之伍之錯之綜之物之形得而無闕數無遁理矣顧其書雖存而習者卒鮮即稍窺其藩亦僅以為歷學一家之言不知其用之無所不可也友人杜子端南東髮好學於天文律歷軒岐諸家無不該覽極深湛之思而歸於平實非心之所安事之所驗雖古人成說不敢從也其於是書尤沛然有得以為原書義例條貫已無可議而解論所繫間有繁多讀者

難則知者少矣於是為之删其冗複存其節要解取詁題論取發解有所未明間以己意附之多者取少迂者取徑使覽者如指掌列眉庶人不苦難而學者益多既成徵序於予予謭陋何能為役然念先君子嘗精研此書弗釋卷不肖總角時每聞其略今愧不能紹前業讀杜子書而附名末議尤所欣願者故為述其大意以應杜子之請而因為之言曰今藝學之榛蕪久矣即以律歷論二者雖同出於數然各有本末不必强同漢魏

以來務為牽合了無確義至天文一家尤多穿鑿凡日月
交食五星淩犯有所弗通不咎推步之失反誣天行之
錯以致扤根人事除翦無辜翕張政刑不可殫述蓋不
徒時刻愆期分秒失算而已是豈非學而不實之過哉
若捨去一切傅會揣合之說而以幾何之學求之則數以
象明理因數顯渙然冰釋無往不合即推而廣之凡量
高測遠授土工治河渠以及百工技藝之巧日用居室
之微無一之可離者然則此書誠格致之要論藝學之

津梁也今夫釋迦之學亦來自西域中更劉宋蕭梁諸人翻演妙諦轉涉懸渺然終屬搏沙無裨實用中國人猶嗜之不啻饑渴幾何一書絕非其倫徐利二公一本平實杜子所述更歸捷簡學者輟其章句詞賦之功假十一於千百數日閒可得之亦何憚而不一覯與杜子先有數學鑰六卷已行於世正與幾何家相為表裏合二書評之皆潔淨精實幾於不能損益一字語不云乎言之無文行之不遠吾以為言之不簡不可為文



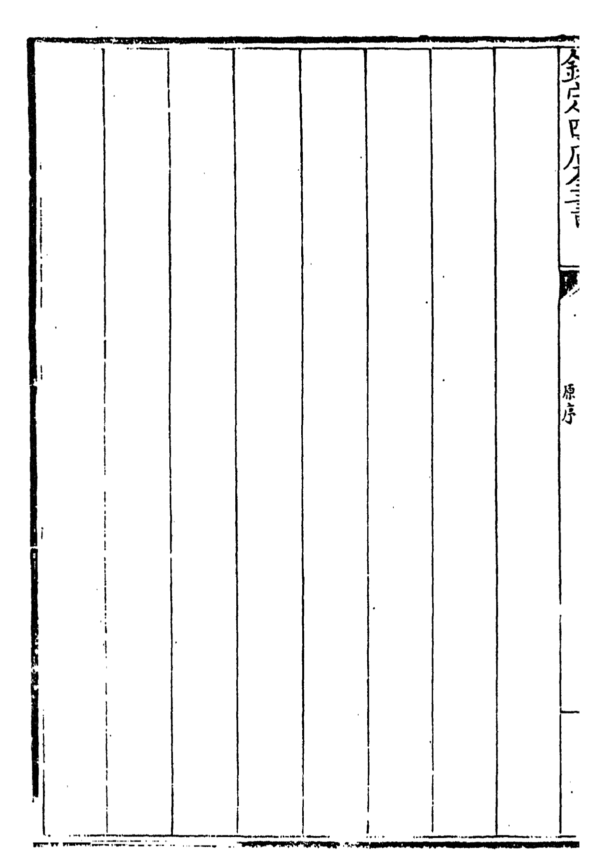
簡而不該不可為簡請以此語贊兩書讀之者既得
其簡即得其該其於是道也庶幾哉吳學顥序

原序

幾何原本者西洋歐吉里斯之書自利氏西來始傳其學元扈徐先生譯以華文歷五載三易稿而後成其書題題相因由淺入深似晦而實顯似難而實易為人不可不讀之書亦人人能讀之書故徐公嘗言曰百年之後必人人習之即又以為習之晚也書成於萬歷丁未至今九十餘年而習者尚寥寥無幾其故何與蓋以每題必先標大綱繼之以解又繼之以論多者千言少者亦不下

百餘言一題必繪數圖一圖必有數線讀者須凝精聚神手誌目顧方明其義精神少懈一題未竟已不知所言為何事習者之寡不盡由此而未必不由此也若使一題之蘊數語輒盡簡而能明約而能該篇幅既短精神易括一目了然如指諸掌吾知人人習之恐晚矣或語余曰子盍約之余曰未易也以一語當數語聽穎者所難而況魯鈍如余者乎雖然試為之於是就其原文因其次第論可約者約之別有可發者以巳意附之解

已盡者節其論題自明者併節其解務簡省文句期合題意而止又推義比類復綴數條於末以廣其餘意既畢事爰授之梓以就正四方倘摘其謬删其繁補其遺漏尤余所厚望焉杜知耕序



幾何論約卷一之首

柘城杜知耕撰

界說三十六則 凡造論先當分別解說論中所用名目故作界說

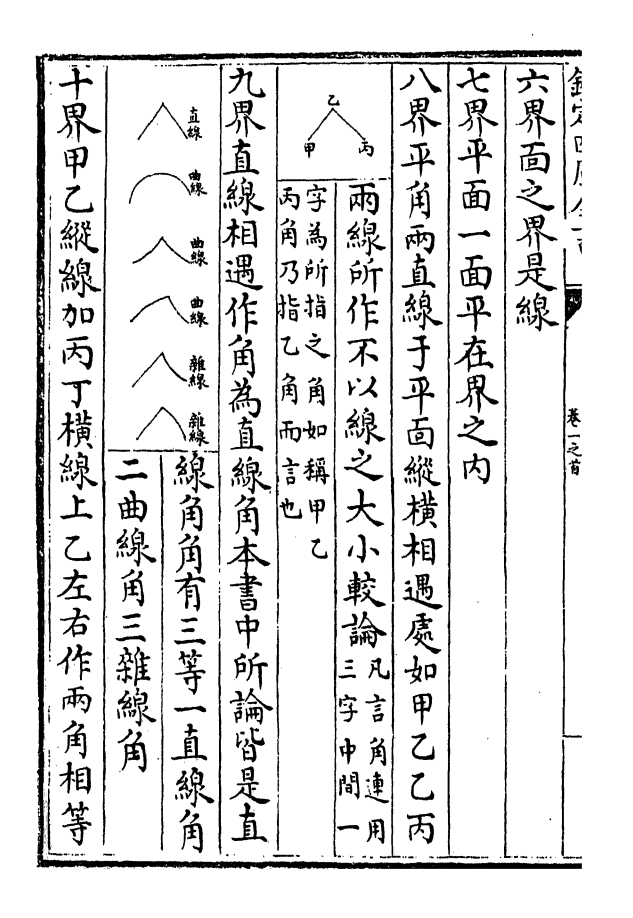
一界點無長短廣狹厚薄

二界線有長短無廣狹厚薄 線有曲有直

三界線之界是點

四界直線止有兩端兩端之間上下更無一點

五界面有長短廣狹而無厚薄



六界面之界是線

七界平面一面平在界之內

八界平角兩直線于平面縱橫相遇處如甲乙乙丙兩線所作不以線之大小較論凡言角連用三字中間一字為所指之角如稱甲乙丙角乃指乙角而言也

九界直線相遇作角為直線角本書中所論皆是直線角角有三等一直線角二曲線角三雜線角

十界甲乙縱線加丙丁橫線上乙左右作兩角相等

两直角方中矩曰直則甲乙為丙丁之垂線

甲
丙　乙　丁

十一界凡角大于直角曰鈍角如甲乙丙角

甲
丙　乙　丁

十二界凡角小于直角曰銳角如前圖甲乙丁角

十三界界者一物之始終今所論有三界點為線之界線為面之界面為體之界體不可為界

十四界形或在一界如平圜立圜等形或在多界之間如平方立

古及平立三角六角八角等形

十五界圜自界至心任作幾許直線俱等

十六界圜之中處為心

十七界自圜之一界作一直線過中心至他界為圜徑徑分圜為兩平分

十八界徑線與半圜界所作形為半圜

十九界在直線界中之形為直線形

二十界在三直線界中之形為三邊形

二十一界在四直線界中之形為四邊形

二十二界在多直線界中之形為多邊形

二十三界三邊形三邊線等為平邊三角形

二十四界三邊形兩邊線等為兩邊等三角形

二十五界三邊形三邊俱不等為三不等三角形

二十六界三邊形有一直角為三邊直角形

二十七界三邊形有一鈍角為三邊鈍角形

二十八界三邊形三角皆銳為三邊銳角形凡三邊形恒以在下者為底兩旁者為腰

二十九界四邊形四邊俱等而角直為直角方形

三十界直角形其角皆直其邊兩兩相等

三十一界斜方形四邊等而非直角

三十二界長斜方形其邊兩兩相等而非直角

三十三界已上四種謂之有法四邊形四種之外他方形皆謂之無法四邊形

三十四界兩直線如甲乙丙丁兩線于同面行至無窮不相離亦不相遠而不相遇為平行線

甲——乙
丙——丁

三十五界一形每兩邊有平行線甲丙與乙丁平行甲乙與丙丁平行

為平行方形

三十六界凡平行方形于對角作直線又于兩邊縱橫各作平行線遇對角線于壬即分此形為四平行方形其兩形有對角線者（己辛庚戊兩形）為角線方形其兩形無角線者（丁壬壬乙兩形）為餘方形（甲乙丙丁方形今止稱為丁乙方形省文也）

求作四則（求作者不得言不可作）

一求自此點至彼點求作一直線

二求一有界直線求從一界引長之成一直線

三求不論大小以點為心求作圜

四求設一度于此求作彼度較此度或大或小（凡言度者或線或面或體皆是）

公論十九則（公論者不可疑）

一論設有多度彼此俱與他等則彼與此自相等

二論有多度等若所加之度等則合并之度亦等

三論有多度等若所減之度等則所存之度亦等

四論有多度不等若所加之度等則合并之度不等

五論有多度不等若所減之度等則所存之度不等

六論有多度俱倍于此度則彼多度俱等

七論有多度俱半于此度則彼多度俱等

八論有二度自相合（謂以此度加于彼度之上兩自相合）則兩度必等

九論全大于其分

十論直角俱相等

十一論有甲乙丙丁兩橫線任作一戊己縱線或正或偏若戊己線旁同方兩角俱小于直角或兩角并小于兩直角則兩橫線愈長愈相近

必有相遇處

十二論兩直線不能為有界之形

十三論兩直線止能于一點相遇

十四論有甲乙丙丁兩度等若于甲乙加乙戊于丙

[戊庚乙　甲 / 己丁　丙]

丁加丁己所加兩度不等則合并之差與所加之差等謂甲戊之大于丙己與乙戊之大于丁己同一戊庚也

十五論有戊乙丁己兩度不等若于戊乙加乙甲于

[戊庚乙　甲 / 己丁　丙]

己丁加丁丙所加兩度等則合并所贏之度

與元所贏之度等謂戊甲之大于已丙與戊乙之大于已丁同一庚戊也

十六論有甲乙丙丁兩度等若于甲乙減戊乙于丙

乙庚戊甲
丁已丙

丁減已丁所減兩度不等則餘度所贏之度與減去所贏之度等謂乙戊之大于已丁與丙已之大于甲戊同一庚戊也

十七論有甲戊丙已兩度不等若于甲戊減甲乙于

戊庚乙甲
已丁丙

丙已減丙丁所減兩度等則餘度所贏之度與元所贏之度等謂乙戊之大于丁已與甲戊之

大于丙巳同一庚戊也

十八論全與諸分之并等

十九論有二全度此全倍于彼全若此全所減之度倍于彼全所減之度則此較相減之餘曰較亦倍于彼較設此度二十彼度十于二十減六于十減三則此較十四彼較七

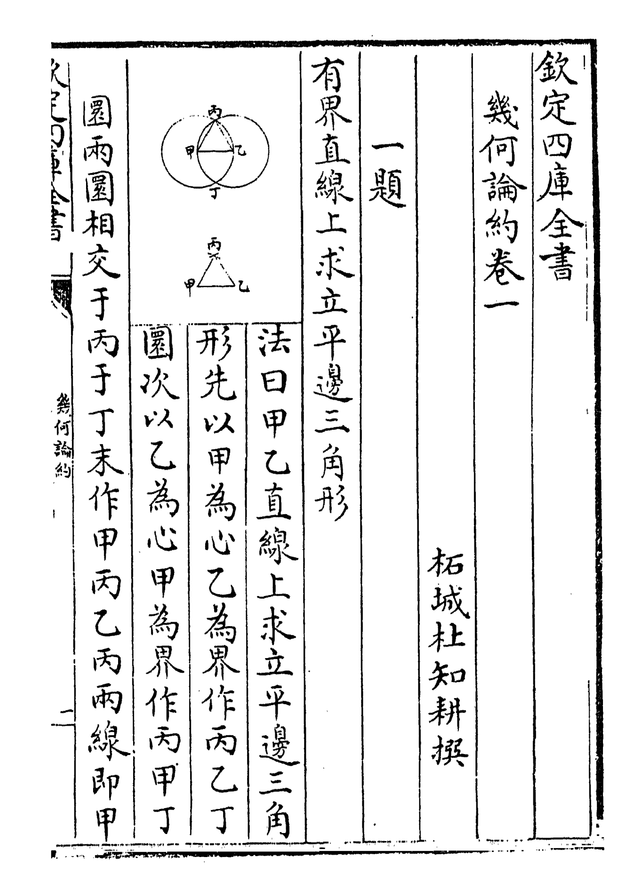
欽定四庫全書

幾何論約卷一

柘城杜知耕撰

一題

有界直線上求立平邊三角形



法曰甲乙直線上求立平邊三角形先以甲為心乙為界作丙乙丁圜次以乙為心甲為界作丙甲丁圜兩圜相交于丙于丁末作甲丙乙丙兩線即甲

乙丙為平邊三角形

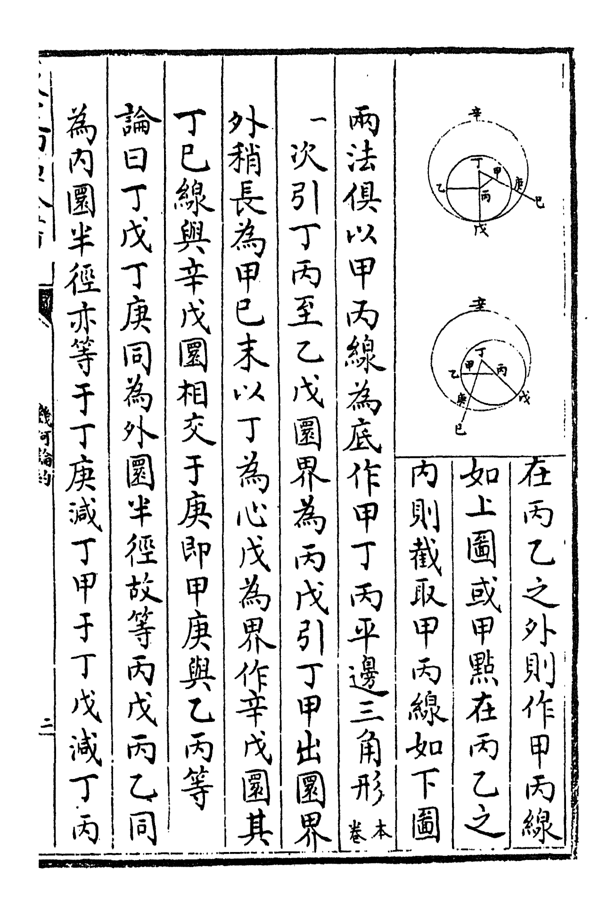
論曰兩圜既等甲乙乙丙丙甲三線皆圜之半徑故等（界說十五）

用法不必作全圜但作短界線相交處即得丙（下圖）

二題

一直線或內或外有一點求以點為界作直線與元線等

法曰有甲點及乙丙線求以甲為界作一線與乙丙等先以丙為心乙為界作乙戊圜次觀甲點若



在丙乙之外則作甲丙線如上圖或甲點在丙乙之內則截取甲丙線如下圖

兩法俱以甲丙線為底作甲丁丙平邊三角形本卷一次引丁丙至乙戊圜界為丙戊引丁甲出圜界外稍長為甲巳末以丁為心戊為界作辛戊圜其丁巳線與辛戊圜相交于庚即甲庚與乙丙等

論曰丁戊丁庚同為外圜半徑故等丙戊丙乙同為內圜半徑亦等于丁庚減丁甲于丁戊減丁丙

其所減兩腰等則所存必等三公論夫甲庚既等于丙戊即等于丙乙矣

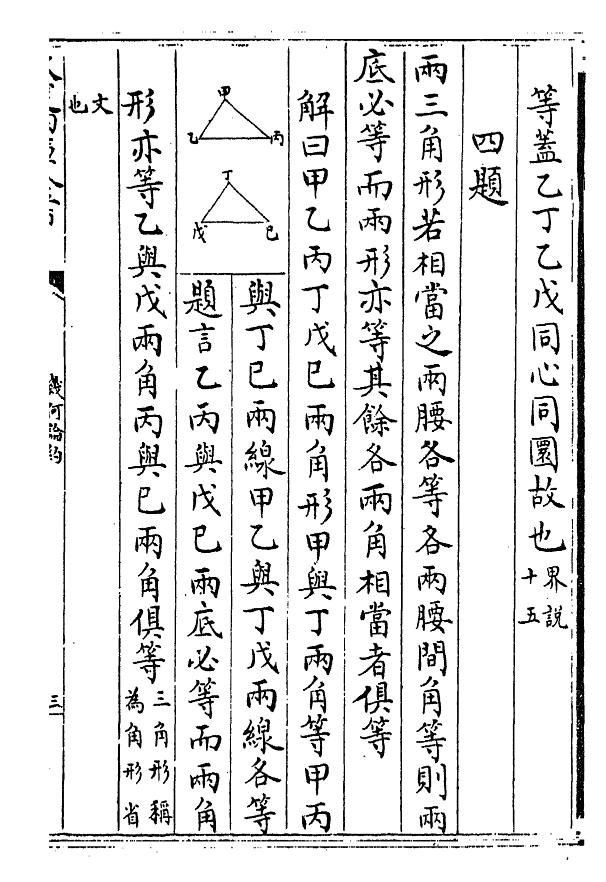
若所設甲點在丙乙線之一界其法尤易若甲點在丙即以丙為心作乙戊圜從丙至戊即所求

三題

長短兩直線求于長線減去短線之度

法曰甲短線乙丙長線求于乙丙減甲

先作乙丁線與甲等次以乙為心丁為界作圜圜界交乙丙于戊即乙戊與等甲之乙丁



等蓋乙丁乙戊同心同圜故也界說十五

四題

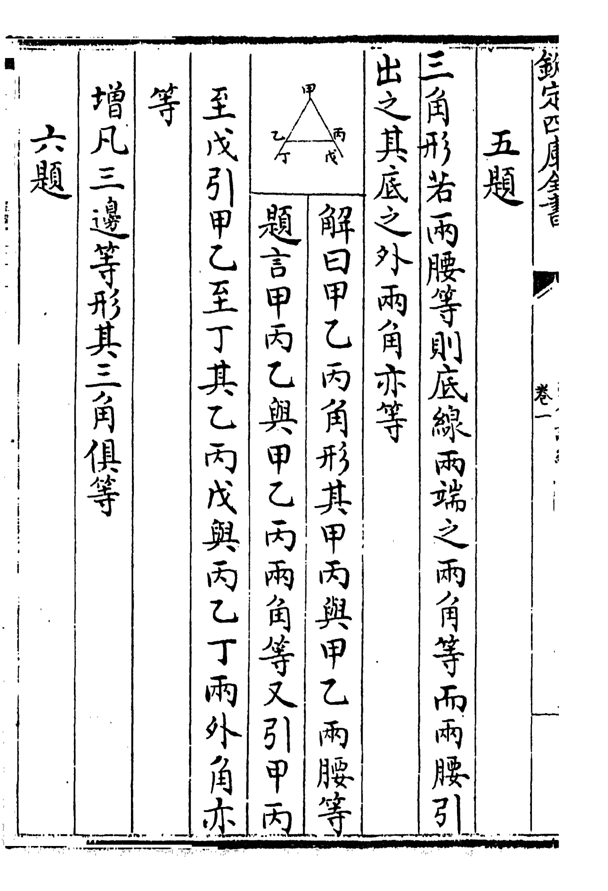
兩三角形若相當之兩腰各等各兩腰閒角等則兩底必等而兩形亦等其餘各兩角相當者俱等

解曰甲乙丙丁戊己兩角形甲與丁兩角等甲丙與丁己兩線甲乙與丁戊兩線各等

題言乙丙與戊己兩底必等而兩角形亦等乙與戊丙與己兩角俱等三角形稱為角形省文也

五題

三角形若兩腰等則底線兩端之兩角等兩兩腰引出之其底之外兩角亦等



解曰甲乙丙角形其甲丙與甲乙兩腰等題言甲丙乙與甲乙丙兩角等又引甲丙至戊引甲乙至丁其乙丙戊與丙乙丁兩外角亦等

增凡三邊等形其三角俱等

六題

三角形若底線兩端之兩角等則兩腰亦等

七題

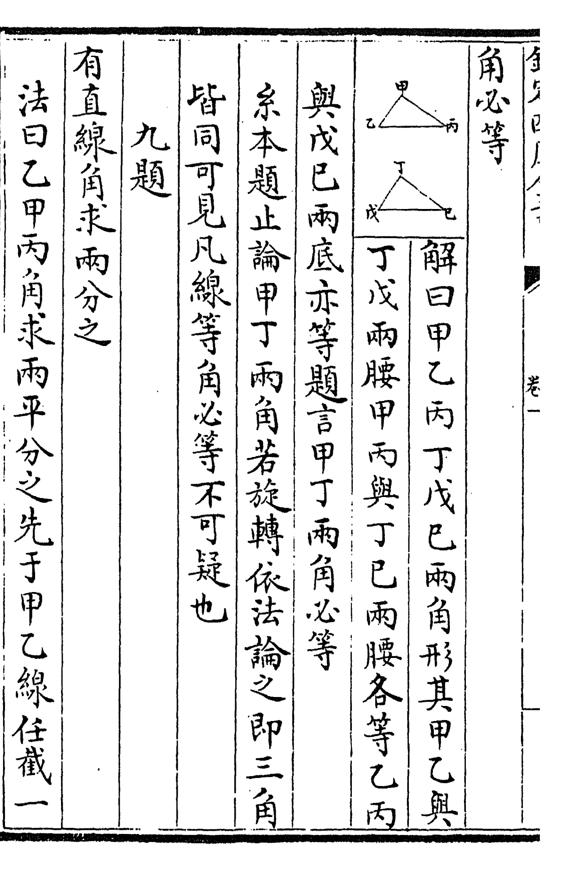
一線為底出兩腰線其相遇止有一點不得別有腰線與元腰線等而于此點外相遇

解曰乙丙線為底于乙于丙各出一線至甲點相遇不得于乙上更出一線與甲乙等丙上更出一線與甲丙等而不于甲相遇

八題

兩三角形若相當之兩腰各等兩底亦等則兩腰間

角必等



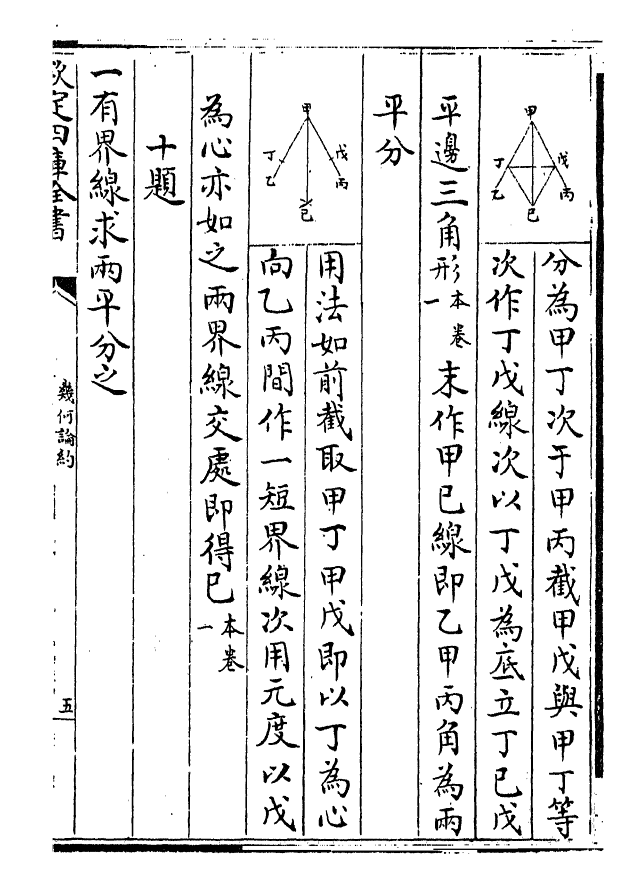
解曰甲乙丙丁戊己兩角形其甲乙與丁戊兩腰甲丙與丁己兩腰各等乙丙與戊己兩底亦等題言甲丁兩角必等

系本題止論甲丁兩角若旋轉依法論之即三角皆同可見凡線等角必等不可疑也

九題

有直線角求兩分之

法曰乙甲丙角求兩平分之先于甲乙線任截一



分為甲丁次于甲丙截甲戊與甲丁等次作丁戊線次以丁戊為底立丁己戊平邊三角形本卷一末作甲己線即乙甲丙角為兩平分

用法如前截取甲丁甲戊即以丁為心向乙丙間作一短界線次用元度以戊為心亦如之兩界線交處即得己本卷一

十題

一有界線求兩平分之

法曰甲乙線求兩平分先以甲乙為底作甲乙丙

兩邊等三角形（本卷一）次平分丙角（本卷九）作丙

丁線即平分甲乙于丁

用法以甲為心任用一度但須長于甲乙線之半

向上向下各作一短界線次用元度以乙

為心亦如之兩界線交處即丙丁末作丙

丁線即平分甲乙于戊

十一題

一直線任于一點上求作垂線

法曰甲乙直線任指丙點求作垂線先任用一度
于丙左右各截一界為丁為戊次以丁戊為
底作丁巳戊兩邊等角形本卷一末作巳丙線
即為甲乙之垂線

用法于丙點左右如前截取丁與戊即以丁
為心任用一度但須長于丙丁線向丙上方
作短界線次用元度以戊為心亦如之兩界
線交處即巳

增若所欲立垂線之點在線末甲界上甲外無餘

線可截則于甲乙線上任取丙點如前法于丙上立丁丙垂線次平分甲丙丁角為巳丙線次于丁丙線截取戊丙與甲丙等次于戊上立垂線與巳丙線相遇于庚末自庚作庚甲線為所求

論曰庚丙甲庚丙戊兩角形等甲與戊兩角必等戊既直角則甲亦直角故庚甲為甲乙之垂線界十

用法甲點上欲立垂線先以甲為心向元線上方任抵一界為丙次用元度以丙為心作大半圜圜

界遇甲乙線于丁次自丁至丙作直線引長至戊遇圜界于巳末作巳甲線為所求

耕曰丁巳既過丙心即是圜徑而巳甲丁則全圜之半也丁甲巳角既負半圜必為直角（三卷三一）故巳甲為甲乙之垂線

十二題

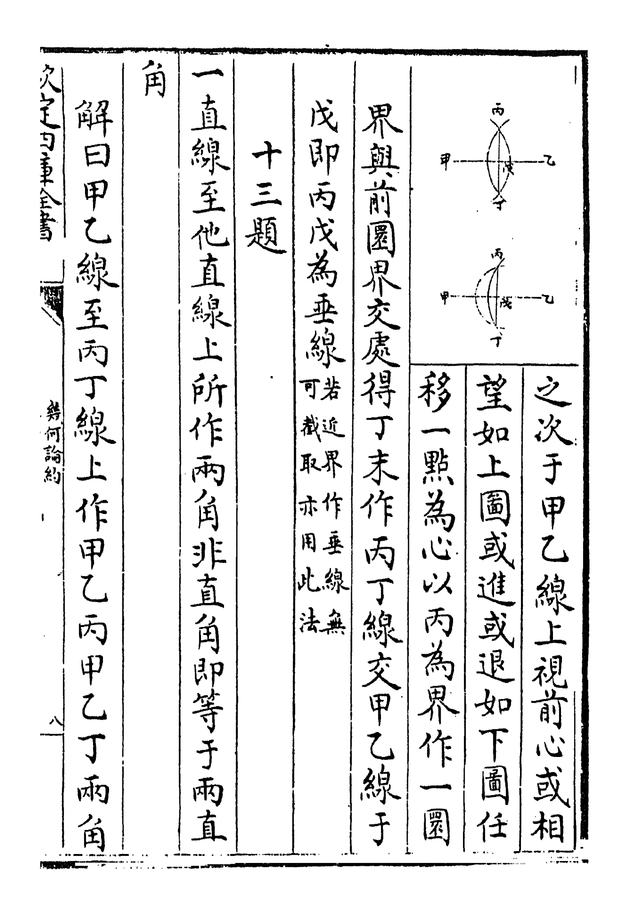
有無界直線之外有一點求自點作垂線至直線上

法曰甲乙線外有丙點求自丙作垂線至甲乙先

以丙為心作一圜令兩交于甲乙線為丁為戊次作丙丁丙戊兩線次平分丁戊于己（本卷十）末作丙己為所求

用法以丙為心向直線兩處各作短界線為甲為乙次用一度以甲為心向丙點相望處作短界線乙為心亦如之兩界線交處為丁末作丙丁交直線于戊即丙戊為垂線

又用法于甲乙線上近甲或近乙任取一點為心以丙為界作一圜界于丙點及相望處各稍引長



之次于甲乙線上視前心或相望如上圖或進或退如下圖任移一點為心以丙為界作一圜界與前圜界交處得丁末作丙丁線交甲乙線于戊即丙戊為垂線若近界作垂線無可截取亦用此法

十三題

一直線至他直線上所作兩角非直角即等于兩直角

解曰甲乙線至丙丁線上作甲乙丙甲乙丁兩角

題言此兩角若非直角即一鋭一鈍而并之等于兩直角

論曰試作戊乙垂線（本卷十一）則戊乙丁戊乙丙兩直角甲乙丁角加一戊乙甲角與戊乙丁直角等甲乙丙角減一戊乙甲角與戊乙丙直角等故甲乙丁甲乙丙兩角并與兩直角等

十四題

一直線于線上一點出不同方兩直線偕元線每旁作兩角若旁兩角與兩直角等即後出兩線為一直

線

解曰甲乙線于丙點上左出一線為丙丁右出一線為丙戊若甲丙戊甲丙丁兩角與兩直角等題言丁丙與丙戊是一直線論同前題

十五題

凡兩直線相交作四角每兩交角必等

解曰甲乙丙丁兩線相交于戊題言甲戊丙丁戊乙兩角甲戊丁丙戊乙兩角各等

論曰兩直線相交則甲戊丁丁戊乙必等于

兩直角甲戊丁甲戊丙亦等于兩直角本卷十三是甲戊丁丁戊乙兩角並與甲戊丁甲戊丙兩角並等矣試減同用之甲戊丁角所存丁戊乙甲戊丙兩角必等餘兩角亦同此論

一系推顯兩直線相交作四角與四直角等

二系凡直線相交于一點不論幾許線幾許角定與四直角等

增題一直線內出不同方兩直線而所作兩交角等即後出兩線為一直線理同本題反言之

十六題

凡三角形之外角必大于相對之各角

解曰甲乙丙角形自乙甲線引至丁題言丁甲丙外角必大于相對之甲乙丙甲丙乙丙角

論曰試以甲丙平分于戊作乙戊線引長之從戊截取戊己與乙戊等次作甲己線成甲戊己戊乙丙兩角形其戊己與戊乙戊甲與戊丙各等甲戊己乙戊丙兩交角又等（本卷十五）則甲己與乙丙兩底

亦等（本卷四）而已甲戊與戊丙乙兩角亦等矣夫已甲戊乃丁甲丙之分則丁甲丙大于已甲戊亦大于相等之戊丙乙矣依前推顯庚甲乙大于辛乙丙庚甲乙又與丁甲丙兩交角相等（本卷十五）是丁甲丙亦大于辛乙丙矣

十七題

凡三角形之每兩角必小于兩直角

解曰甲乙丙角形題言每兩角并俱小于兩直角

論曰試引丙乙至丁甲乙丙甲乙丁兩角并與兩直角等（本卷十三）而甲乙丁外角必大于甲丙乙内角（本卷十六）是甲乙丙與甲丙乙兩角并小于兩直角矣

餘二角倣此

十八題

凡三角形大邊對大角小邊對小角

甲 乙 丁 丙

解曰甲乙丙角形之甲丙邊大于甲乙邊乙丙邊題言甲乙丙角大于甲丙兩角

論曰試于甲丙線上截甲丁與甲乙等作乙丁線

則甲乙丁與甲丁乙兩角等矣本卷五夫甲丁乙角者乙丙丁角形之外角必大于相對之丁丙乙內角本卷十六則甲乙丁角亦大于甲丙乙角而况甲乙丙又函甲乙丁于其中不更大于甲丙乙乎如乙丙邊大于甲乙邊則甲角亦大于丙角依此推顯

十九題

凡三角形大角對大邊小角對小邊

二十題

凡三角形之兩邊并必大于一邊

二十一題

凡三角形于一邊之兩界出兩線復作一三角形在其內則內形兩腰并必小于相對兩腰并而後兩線所作角必大于相對角

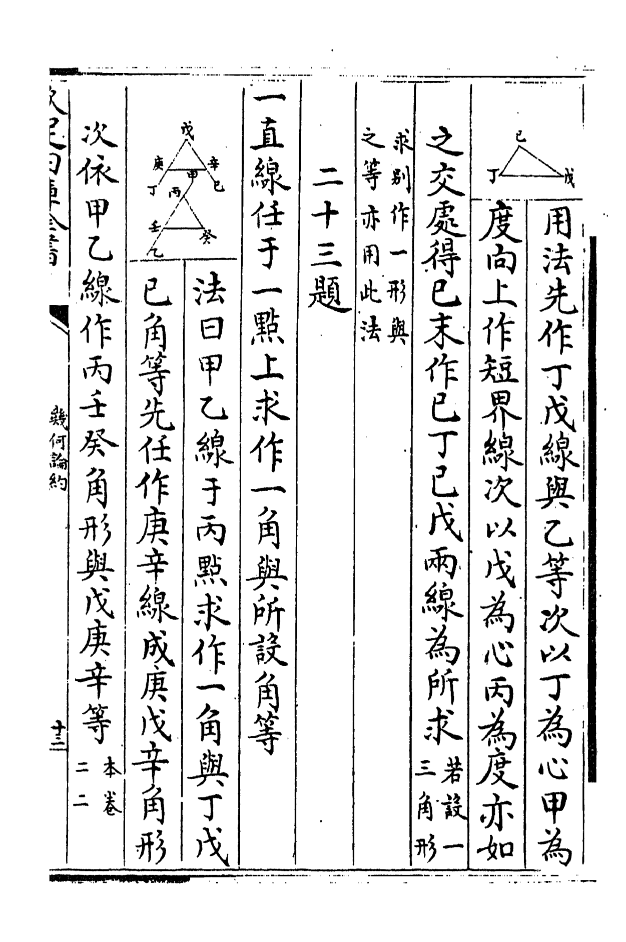
解曰甲乙丙角形于乙丙邊之兩界各出一線遇于丁題言丁丙丁乙兩線并必小于甲乙甲丙并而乙丁丙角必大于乙甲丙角

二十二題

三直線其每兩線并大于一線求作三角形

甲　乙　丙
癸
丑　子
丁　已　庚　戊　辛
壬

法曰甲乙丙三線其第一第二線并大于第三線（若兩線比第三線或等或小即不能作三角形見本卷二十）求作三角形先任作丁戊線長于三線并次截丁已與甲等截已庚與乙等截庚辛與丙等次以已為心丁為界作丁壬癸圜以庚為心辛為界作辛壬癸圜其兩圜相遇下為壬上為癸末以庚已為底作癸庚癸已兩線即得已癸庚三角形（壬點亦可作　若兩圜不相交即是兩線或等或小于第三線不成三角形）



用法先作丁戊線與乙等次以丁為心甲為度向上作短界線次以戊為心丙為度亦如之交處得巳末作巳丁巳戊兩線為所求若設一三角形求別作一形與之等亦用此法

二十三題

一直線任于一點上求作一角與所設角等

法曰甲乙線于丙點求作一角與丁戊巳角等先任作庚辛線成庚戊辛角形次依甲乙線作丙壬癸角形與戊庚辛等本卷二二

二十四題

兩三角形相當之兩腰各等若一形之腰間角大則底亦大

解曰甲乙丙與丁戊庚兩角形其甲乙與丁戊兩腰甲丙與丁庚兩腰各等若甲角大于戊丁庚角題言乙丙底亦大于戊庚底

耕曰設丁戊己與甲乙丙形等則角與底必俱等若丁己線開至辛甲角小于丁角而乙丙底亦必小于戊辛底若丁己線斂至庚甲角大于丁角而

乙丙底亦大于戊庚底

二十五題

兩三角形相當之兩腰各等若一形之底大則腰間角亦大

二十六題

兩三角形有相當之兩角等及相當之一邊等則餘兩邊必等餘一角亦等其一邊不論在兩角之内及一角之對

解曰甲乙丙形之乙丙兩角與丁戊己形之戊己

兩角各等或兩角內之乙丙邊與戊己邊等或對丙角之甲乙邊與對己角之丁戊邊等題言兩形之餘兩邊一角必俱等

二十七題

兩直線有他直線交加其上若內相對兩角等即兩直線必平行

解曰甲乙丙丁兩直線加他直線戊己交于庚于辛而甲庚辛與丁辛庚兩角等題言甲乙丙丁兩線必平行

論曰如不平行兩線必相遇于壬戍庚辛壬三角形則甲庚辛外角宜大于相對之庚辛壬内角本卷十六若兩角等則兩線必平行

二十八題

兩直線有他直線交加其上若外角與同方相對之内角等或同方兩内角與兩直角等即兩直線必平行

解曰甲乙丙丁兩直線加他直線戊巳交于庚于辛題言若戊庚甲外角與同方相對之庚辛丙内

角等則兩線必平行又言若甲庚辛與丙辛庚同方兩内角并與兩直角等則兩線必平行

二十九題

兩平行線有他直線交加其上則内相對兩角必等外角與同方相對之内角亦等同方兩内角亦與兩直角等義同上二題反言之

三十題

兩直線與他直線平行則元兩線亦平行此題所指線在同面

者不同面線後別有論

三十一題

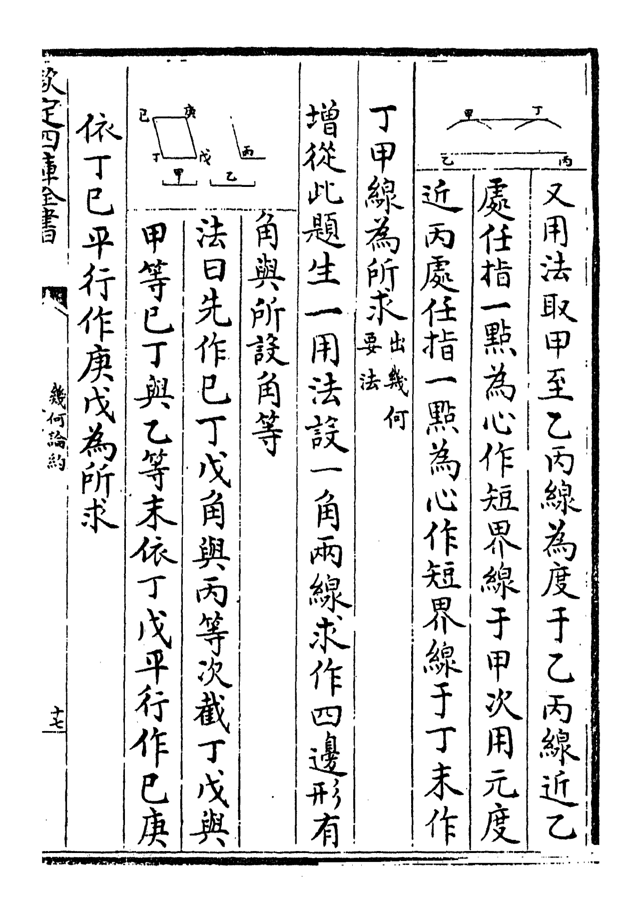
一點上求作直線與所設直線平行

法曰甲點求作直線與乙丙平行先從甲向乙丙線任作甲丁線即乙丙線上成甲丁乙角次于甲點上作一角與甲丁乙等（本卷二三）為戊甲丁引長戊甲至己即己戊為所求

論曰戊甲丁甲丁乙相對之兩內角等兩線必平行（本卷二八）

用法先從甲點作甲丁線次以丁為心任作戊己圜界次用元度以甲為心作庚辛圜界少長于戊己次取戊己度截庚辛圜界于辛末作甲辛線為所求

又用法以甲點為心于乙丙線近乙處任作短界線為丁次用元度以丁為心于乙丙線向丙作短界線為戊次用元度以戊為心向上與甲平處作短界線又用元度以甲為心向甲之平處作短界線兩界線交處為己末作己甲線為所求



又用法取甲至乙丙線為度于乙丙線近乙處任指一點為心作短界線于甲次用元度近丙處任指一點為心作短界線于丁末作丁甲線為所求出幾何要法

增從此題生一用法設一角兩線求作四邊形有角與所設角等

法曰先作巳丁戊角與丙等次截丁戊與甲等巳丁與乙等末依丁戊平行作巳庚依丁巳平行作庚戊為所求

三十二題　二支

凡三角形之外角與相對之內兩角并等凡三角形之內三角并與兩直角等

先解曰甲乙丙角形乙丙邊引至丁題言甲丙丁外角與甲乙兩內角并等

論曰試作戊丙線與甲乙平行即甲丙為甲乙戊丙之交加線則乙甲丙角與相對之甲丙戊角等本卷二九又乙丁與兩平行線相遇則戊丙丁外角與相對之乙內角等本卷二九故甲丙丁外角與甲

乙丙內角并等

後解曰甲乙丙三角并與兩直角等

論曰甲丙乙甲丙丁兩角并與兩直角等（本卷十三）又與甲乙丙三角并等是三角亦與兩直角等

增從此推知第一形當兩直角第二形（可分三角形二）當四直角第三形（可分三角形三）當六直角第四形（可分三角形四）當八直角從此可推至無窮

耕曰不論何形凡形四邊可當四直角五邊可當

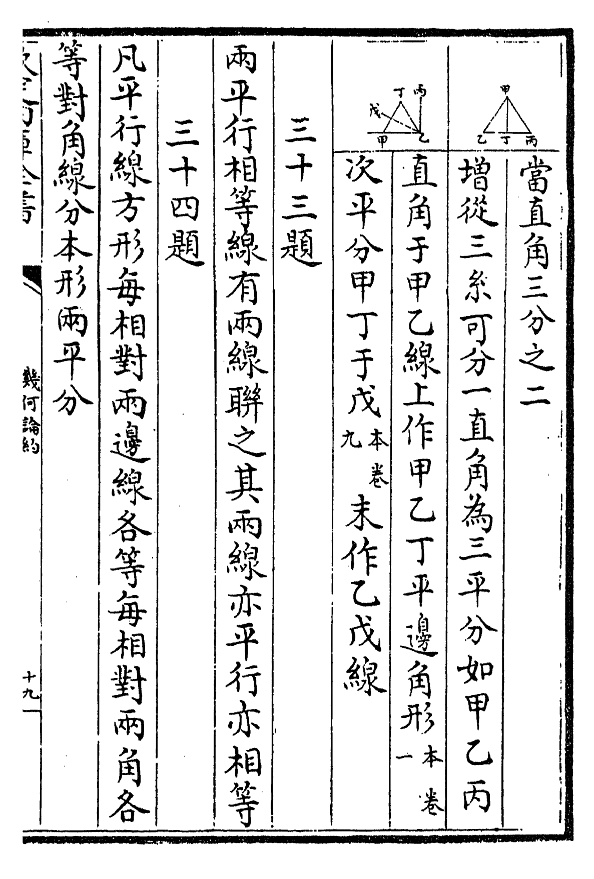
六直角六邊可當八直角七邊可當十直角從此可推至無窮

一系凡諸種角形之三角并俱相等

二系凡兩腰等角形若腰間直角則餘兩角每當直角之半腰間鈍角則餘兩角俱小于半直角腰間鋭角則餘兩角俱大于半直角

三系平邊角形每當直角三分之二

四系甲乙丙平邊角形以甲丁垂線分之其丁甲丙丁甲乙兩角每當直角三分之一乙丙兩角每



當直角三分之二

增從三系可分一直角爲三平分如甲乙丙直角于甲乙線上作甲乙丁平邊角形（本卷一）次平分甲丁于戊（本卷九）末作乙戊線

三十三題

兩平行相等線有兩線聯之其兩線亦平行亦相等

三十四題

凡平行線方形每相對兩邊線各等每相對兩角各等對角線分本形兩平分

解曰甲乙丙丁平行方形題言甲乙與丙丁兩線甲丙與乙丁兩線各等又言乙與丙兩角丁與甲兩角各等又言若作甲丁對角線

即分本形為兩平分

三十五題

兩平行方形若同在平行線內又同底則兩形必等

解曰甲乙丙丁兩平行線內有丙丁戊甲與丙丁乙己兩平行方形同丙丁底題言兩形等等者謂所函之地等後言形等者多做此

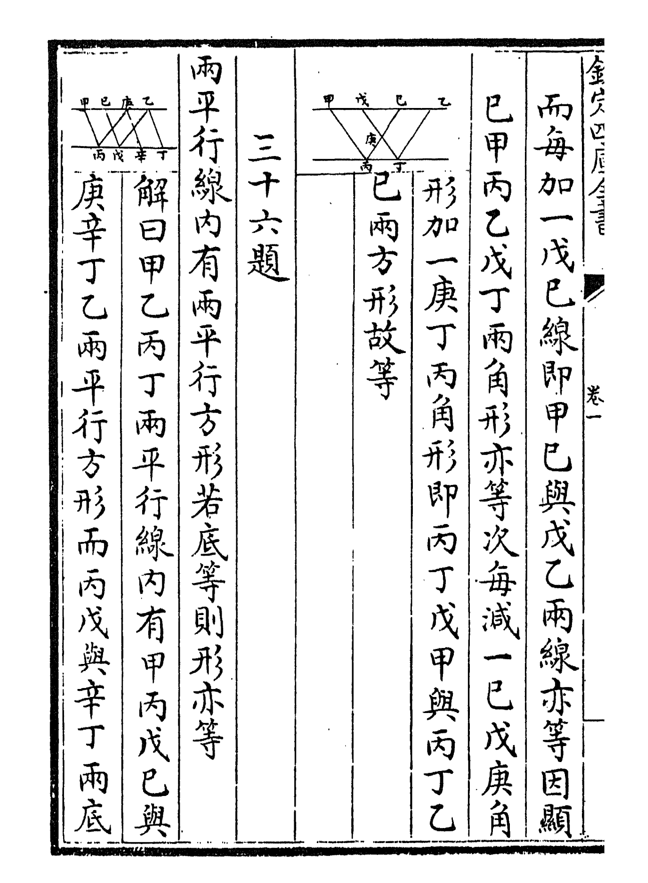
甲 己 戊 乙
丙 丁

先論己點在甲戊之內曰甲戊己乙兩線等試于兩線各減己戊餘甲己戊乙亦等因顯甲丙己戊丁乙兩角形亦等（本卷四）次于兩角形每加一丙丁戊己四邊形即丙丁戊甲丙丁乙己丙方形安得不等

次論己戊同點曰甲丙戊戊丁乙兩角形等次于兩角形每加一丙戊丁角形即丙丁戊甲與丙丁戊乙兩方形故等

甲 戊 乙
丙 丁

後論己點在甲戊之外曰甲戊己乙兩線等



而每加一戊巳線即甲巳與戊乙兩線亦等因顯巳甲丙乙戊丁兩角形亦等次每減一巳戊庚角形加一庚丁丙角形即丙丁戊甲與丙丁乙巳兩方形故等

三十六題

兩平行線内有兩平行方形若底等則形亦等

解曰甲乙丙丁兩平行線内有甲丙戊巳與庚辛丁乙兩平行方形而丙戊與辛丁兩底

等題言兩形亦等

論曰試作丙庚戊乙兩線成庚丙戊乙方形此形與庚辛丁乙方形同庚乙底必等與甲丙戊巳方形同丙戊底亦等本卷三五即甲丙戊巳與庚辛丁乙兩方形自相等

三十七題

兩平行線内有兩三角形若同底則兩形必等

三十八題

兩平行線内有兩三角形若底等則兩形必等

耕曰三角形當等高等底方形之半兩方形等則兩角形必亦等論同前二題平行方形

增甲乙丙角形任于乙丙邊平分于丁作丁甲線即分本形為兩平分

論曰試于甲角上作直線與乙丙平行則甲乙丁甲丁丙兩角形在平行線内兩底等則兩形亦等

二增甲乙丙角形從丁點求兩平分法先作丁甲線次平分乙丙于戊作戊巳線與甲丁平行末作

巳丁線即分本形為兩平分

論曰試作甲戊直線即甲戊巳巳丁戊兩角形在平行線內同巳戊底必等而每加一巳戊丙形則巳丁丙與甲戊丙兩角形亦等夫甲戊丙為甲乙丙之半則巳丁丙亦甲乙丙之半

三十九題

兩三角形其底同其形等必在兩平行線內

四十題

兩三角形其底等其形等必在兩平行線內

四十一題

兩平行線內有一平行方形一三角形同底則方形倍大于三角形

四十二題

有三角形求作平行方形與之等而方形角有與所設角等

法曰求作平行方形與甲乙丙角形等而有丁角先平分乙丙邊于戊次作丙戊己角與丁等本卷十次作甲庚直線與乙丙平行末作

丙庚線與戊巳平行即得巳戊丙庚方形為所求

四十三題

凡方形對角線旁兩餘方形自相等

解曰甲乙丙丁方形有甲丙對角線題言兩旁之壬戊與丁庚兩餘方形自相等

論曰甲乙丙甲丙丁兩角形等又甲戊庚甲庚辛兩角形庚壬丙庚丙巳兩角形各等于甲乙丙形内減甲庚戊庚壬丙兩形于甲丙丁形内減甲庚辛庚丙巳兩形則所存壬

戊丁庚丙餘方形安得不等

四十四題

一直線上求作平行方形與所設三角形等而方形角有與所設角等

法曰求于甲線上作平行方形與乙等而有丙角

先作巳丁方形與乙等而丙角與丙等次引長丁戊庚巳兩線為戊壬巳辛令各與甲等次作壬巳對角線引出之次引長戊巳丁庚兩線而丁庚遇對角

線于癸未作癸子與庚辛平行作壬子與戊丑平行即己丑子辛平行方形為所求論同本卷四二四三

四十五題

有多邊直線形求作一平行方形與之等而方形角有與所設角等

法曰求作平行方形與甲乙丙五邊形等而有丁角先分五邊形為甲乙丙三三角形次作戊己庚辛方形與甲等而有丁角次引長戊辛己庚作庚辛壬癸方

形與乙等而有丁角末復引前線作壬癸子丑方形與丙等而有丁角即此三形并成一平行方形為所求（自五以上俱此法論同本卷四二四四）

增題甲乙兩形甲大乙小以乙減甲求較幾何法

先任作丁丙己戊方形與甲等次于丙丁線上作丁丙辛庚方形與乙等即得辛庚戊己為甲乙相減之較

四十六題

一直線上求立直角方形

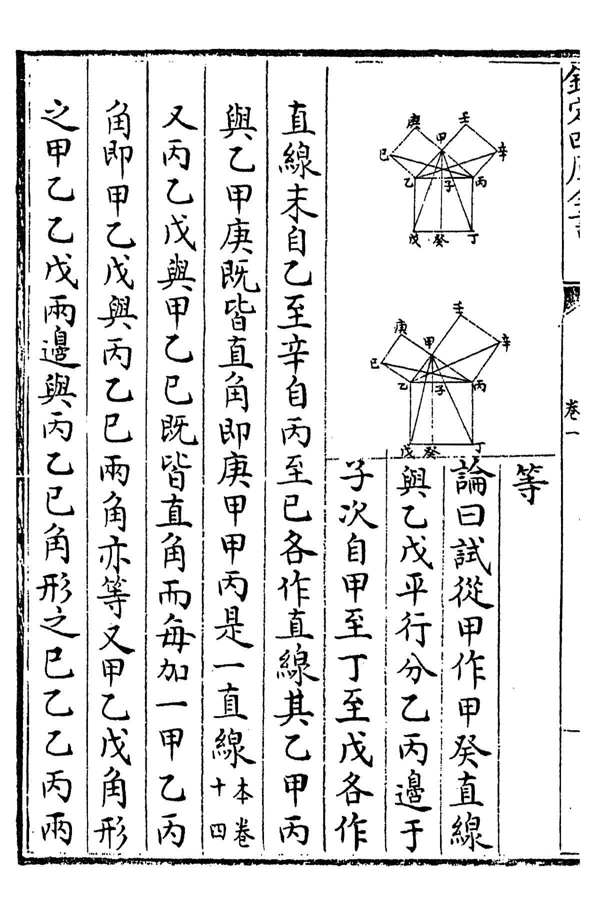
法曰甲乙線上求立直角方形先于甲乙兩界各立垂線為丙甲丁乙皆與甲乙線等末作丙丁聯之即直角方形

丙 丁 甲 乙

四十七題

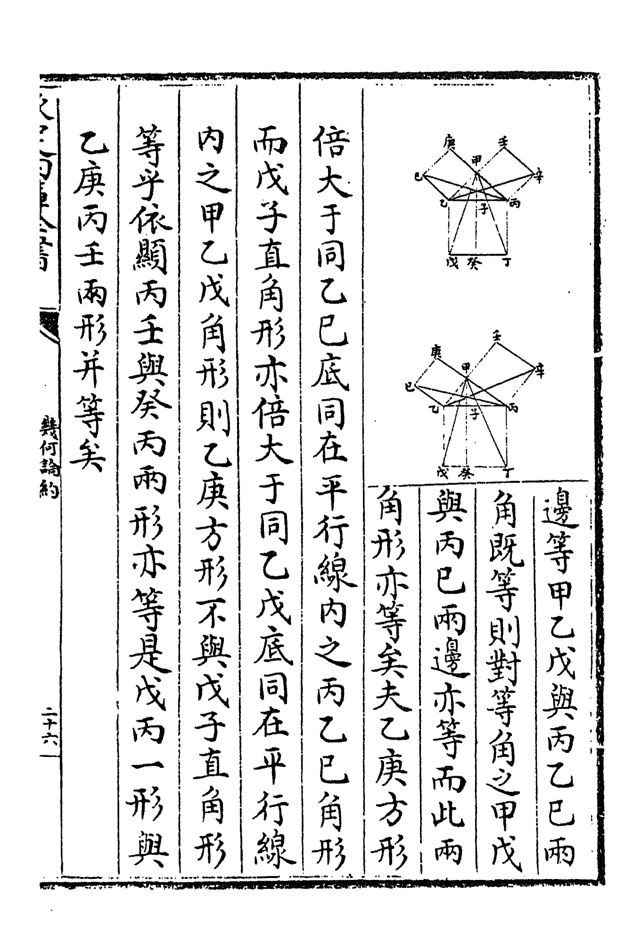
凡三邊直角形對直角邊上所作直角方形與餘兩邊上所作直角方形并等

解曰甲乙丙角形于對乙甲丙直角之乙丙邊上作乙丙丁戊方形題言此方形與甲乙邊上所作甲乙巳庚及甲丙邊上所作甲丙辛壬兩方形并



等

論曰試從甲作甲癸直線與乙戊平行分乙丙邊于子次自甲至丁至戊各作直線末自乙至辛自丙至巳各作直線其乙甲丙與乙甲庚既皆直角即庚甲甲丙是一直線（本卷十四）又丙乙戊與甲乙巳既皆直角而每加一甲乙丙角即甲乙戊與丙乙巳兩角亦等又甲乙戊角形之甲乙乙戊兩邊與丙乙乙巳角形之巳乙乙丙兩



邊等甲乙戊與丙乙巳兩角既等則對等角之甲戊與丙巳兩邊亦等而此兩角形亦等矣夫乙庚方形倍大于同乙巳底同在平行線內之丙乙巳角形而戊子直角形亦倍大于同乙戊底同在平行線內之甲乙戊角形則乙庚方形不與戊子直角形等乎依顯丙壬與癸丙兩形亦等是戊丙一形與乙庚丙壬兩形并等矣

一增凡直角方形之對角線上所作直角方形倍大于元形

二增設不等兩方形一以甲為邊一以乙為邊求別作兩方形自相等而并之又與元設兩形并等法先作丙丁戊形令丙丁與甲等丙戊與乙等而直角末于丁戊兩端各作半直角兩腰遇于巳而等則巳必直角（本卷三二）即巳戊巳丁上兩方形自相等并之又與甲乙上兩方形并等

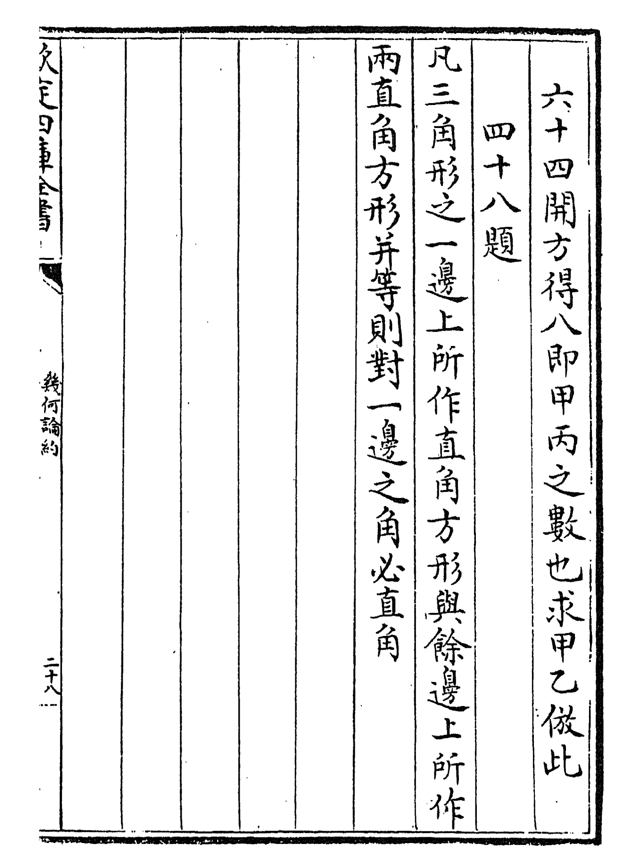
論曰丁戊上方形與丁丙丙戊上兩方形并等又

與丁巳巳戊上兩方形并等是丁巳巳戊上兩方形并與丁丙丙戊上兩方形并亦等

三增多直角方形求并作一方形設不等五方形其邊為甲乙丙丁戊先作巳庚辛直角令巳庚與甲等辛庚與乙等次作巳辛線旋作巳辛壬直角令辛壬與丙等次作巳壬線旋作巳壬癸直角令壬癸與丁等次作巳癸線旋作巳癸子直角令癸子與戊等末作巳子線即巳子線上所作方形為所求

論曰辛巳上方形與甲乙上兩方形并等巳壬上方形與甲乙丙上三方形并等餘倣此

四增甲乙丙三邊直角形以兩邊求第三邊長短之度如先得甲乙數六甲丙數八求乙丙之數其甲乙甲丙上兩方形并既與乙丙上方形等甲乙之冪三十六方形自乘之數曰冪甲丙之冪六十四并之得百而乙丙之冪亦百開方得十即乙丙之數也又設先得甲乙六乙丙十而求甲丙之數乙丙之冪百減甲乙之冪三十六餘



六十四開方得八即甲丙之數也求甲乙做此

四十八題

凡三角形之一邊上所作直角方形與餘邊上所作兩直角方形并等則對一邊之角必直角

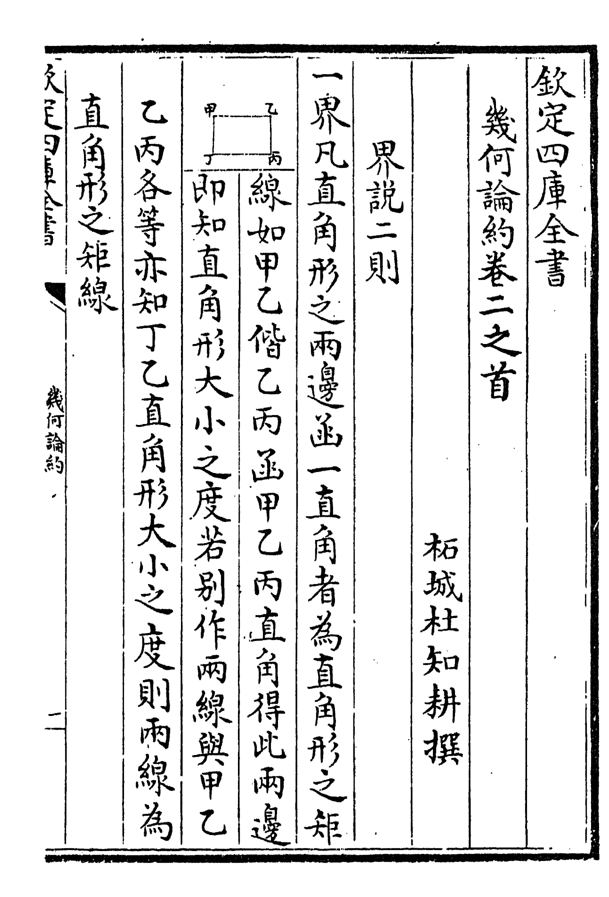
幾何論約卷一

幾何論約卷二之首

柘城杜知耕撰

界說二則

一界凡直角形之兩邊函一直角者為直角形之矩



線如甲乙偕乙丙函甲乙丙直角得此兩邊即知直角形大小之度若別作兩線與甲乙乙丙各等亦知丁乙直角形大小之度則兩線為直角形之矩線

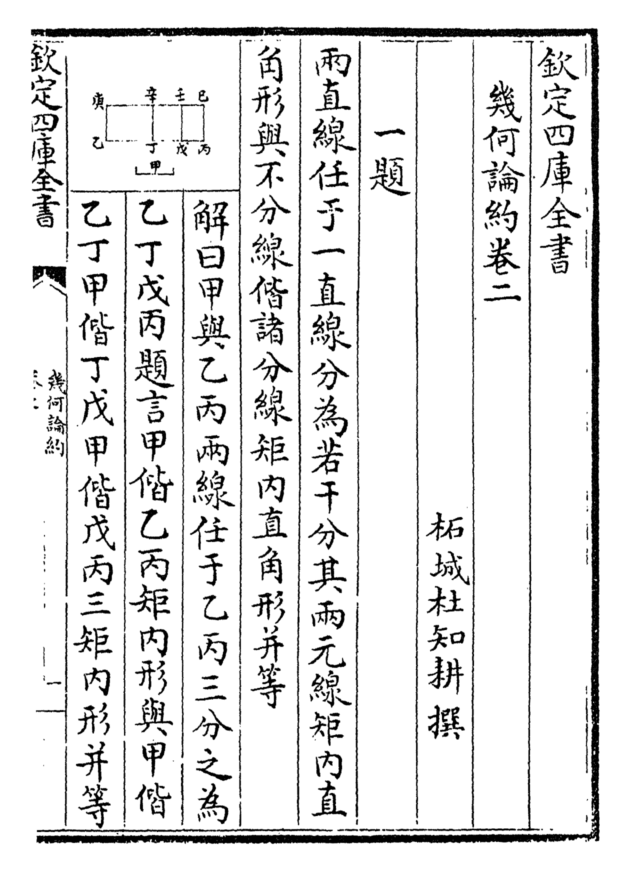
二界諸方形有對角線者其兩餘方形任偕一角線方形為磬折形如乙丁方形不論斜直作甲丙對角線從庚點作戊己辛壬兩線與方邊平行而分本形為四方形其辛己戊壬為餘方形辛戊己壬為角線方形兩餘方形任與壬己一角線方形并形曲如磬謂之癸子庚磬折形用戊辛角線方形倣此

幾何論約卷二

柘城杜知耕撰

一題

兩直線任予一直線分為若干分其兩元線矩內直角形與不分線偕諸分線矩內直角形并等



解曰甲與乙丙兩線任予乙丙三分之為乙丁戊丙題言甲偕乙丙矩內形與甲偕乙丁甲偕丁戊甲偕戊丙三矩內形并等

論曰乙巳全形即甲偕乙丙矩內形乙辛丁壬戊巳三分形即甲偕乙丁丁戊戊丙三矩內形故三分形并與全形等

二題

一直線任兩分之其元線上直角方形與元線偕兩分線兩矩內形并等

三題

一直線任兩分之其元線任偕一分線矩內直角形與分餘線偕一分線矩內直角形及一分線上直角

方形并等

解曰甲乙線任分于丙題言元線甲乙任偕一分線甲丙矩內形（不論甲丙為大分為小分）與分餘丙乙偕甲丙矩內形及甲丙上方形并等

論曰甲巳為元線甲乙偕分線甲丙矩內形甲丁為分線甲丙上方形丙巳為甲丙偕分餘線丙乙矩內形是甲丁及丙巳兩分形并與甲巳全形等

四題

一直線任兩分之其元線上直角方形與各分線上兩直角方形及兩分線矩内形二并等

解曰甲乙線任分于丙題言甲乙線上方形與甲丙丙乙線上兩方形及甲丙偕丙乙丙乙偕甲丙兩矩内形并等

戊　己　丁
庚
辛　壬
甲　丙　乙

論曰甲丁為甲乙元線上方形辛己為甲丙上方形丙壬為丙乙上方形甲庚庚丁俱甲丙偕丙乙矩内形也故四形并與甲乙元線上甲丁方形等

系凡直角方形之角線形皆直角方形

五題

一直線兩平分之又任兩分之其任兩分線矩內形及分內線上方形并與平分半線上方形等

解曰甲乙線平分于丙又任分于丁其丙丁為分內線丙丁線者丙乙所以大于丁乙之較又甲丁所以大于甲丙之較故曰分內線題言甲丁丁乙矩內形及分內線丙丁上方形并與丙乙線上方形等

論曰癸庚為丙丁上方形丁壬為丁乙

上方形丙辛辛巳為兩餘方自相等辛巳加一丁壬則與丙壬等即與甲癸等甲癸加一丙辛即甲丁偕丁乙矩内形豈不與卯寅丑磬折形等乎故加一丙丁上癸庚方形與丙乙線上方形等

六題

一直線兩平分之又任引增一直線共為一全線其全線偕引增線矩内形及半元線上方形并與半元線偕引增線上方形等

解曰甲乙線平分于丙又從乙引增乙丁與甲乙

通為一全線題言甲丁偕乙丁矩內形及半元線丙乙上方形并與丙丁上方形等

論曰甲癸與丙辛等又丙辛與辛戊等即辛戊與甲癸亦等甲癸加一丙壬即甲丁偕丁乙矩內形與卯寅丑磬折形等矣故加一乙丙上癸庚方形與丁丙上丙戊方形等

七題

一直線任兩分之其元線上及任用一分線上兩方形并與元線偕一分線矩內形二及分餘線上方形

并等

解曰甲乙線任分于丙題言元線甲乙上及任用一分線甲丙上兩方形并（不論甲丙為大分為小分）與甲乙偕甲丙矩內形二及分餘線丙乙上方形并等

論曰甲丁為甲乙上方形辛巳為甲丙上方形丙壬為丙乙上方形甲巳與辛丁皆甲乙偕甲丙矩內形也兩矩內形及丙壬方形并與甲丁方形較多一辛巳方形故與甲乙及甲丙上兩方形并等

八題

一直線任兩分之其元線偕初分線矩內形四及分餘線上方形并與元線偕初分線上方形等

解曰甲乙線任分于丙題言元線甲乙偕初分線丙乙矩內形四（不論丙乙為大分為小分）及分餘線甲丙上方形并與甲乙偕丙乙（通作一線）上方形等

論曰丙巳庚壬壬丁丁乙皆甲乙偕丙乙矩內形甲子為甲丙上方形此五形并與甲乙偕丙乙上方形

等甲乙偕丙乙上方形即癸巳全形也

九題

一直線兩平分之又任兩分之任分線上兩方形并倍大于平分半線上及分內線上兩方形并

解曰甲乙線平分于丙又任分于丁題言甲丁丁乙上兩方形并倍大于平分半線甲丙上分餘線

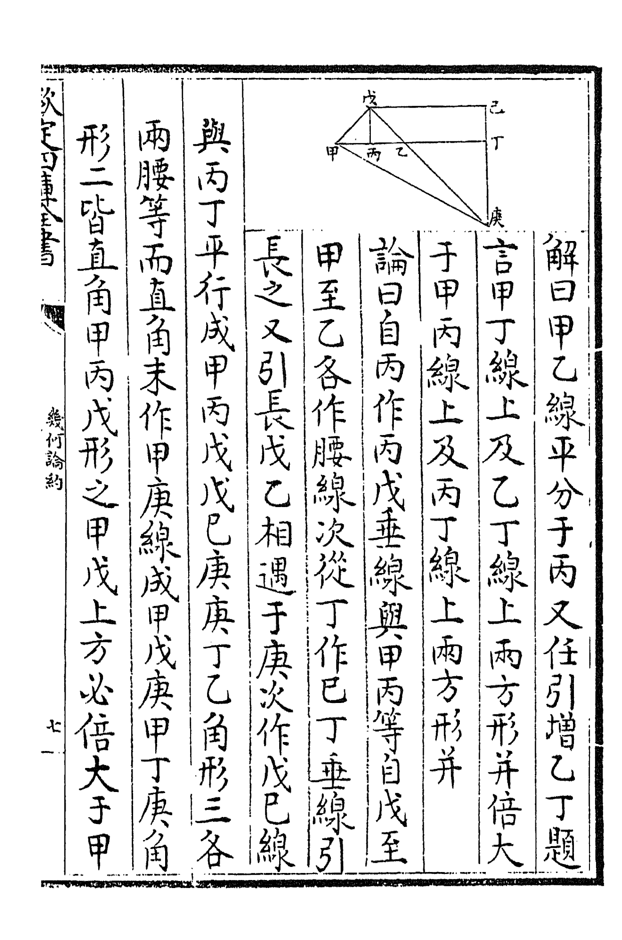
丙丁上兩方形并

論曰自丙作丙戊垂線與甲丙等次作甲戊戊乙兩腰次從丁作丁巳垂線遇戊乙于巳從巳作巳庚線與甲乙平行成戊庚巳甲丙戊巳丁乙角形三皆兩腰等而直角末作甲巳線成巳戊甲甲丁巳角形二皆直角戊庚巳形之戊巳上方必倍大于巳庚上方即倍大于等巳庚之丙丁上方甲丙戊形之甲戊上方必倍大于甲丙上方又甲戊巳形之甲巳

上方與戊巳甲戊上兩方形并等即甲巳上方亦倍大于甲丙丙丁上兩方形并又甲巳上方與甲丁丁巳上兩方形并等即與甲丁及等丁巳之丁乙上兩方形并等夫甲丁丁乙上兩方形并既等于甲巳上方形必亦倍大于甲丙丙丁上兩方形并

十題

一直線兩平分之又任引增一線共為一全線其全線上及引增線上兩直角方形并倍大于平分半線上及分餘半線偕引增線上兩直角方形并



解曰甲乙線平分于丙又任引增乙丁題言甲丁線上及乙丁線上兩方形并倍大于甲丙線上及丙丁線上兩方形并

論曰自丙作丙戊垂線與甲丙等自戊至甲至乙各作腰線次從丁作巳丁垂線引長之又引長戊乙相遇于庚次作戊巳線與丙丁平行成甲丙戊戊巳庚庚丁乙角形三各兩腰等而直角末作甲庚線成甲戊庚甲丁庚角形二皆直角甲丙戊形之甲戊上方必倍大于甲

丙上方戊巳庚形之戊庚上方必倍大于等戊巳之丙丁上方又甲庚上方與甲戊戊庚上兩方形并等即甲庚上方亦倍大于甲丙丙丁上兩方形并又甲丁及等丁庚之丁乙上兩方形并與甲庚上方形等是甲丁丁乙上兩方形并亦倍大于甲丙丙丁上兩方形并矣

十一題

一直線求兩分之而元線偕初分線矩內形與分餘線上方形等

法曰甲乙線求兩分之令元線偕初分小線矩内形與分餘大線上方形等先于甲乙線上作甲丙方形次平分甲丁于戊作戊乙線次引戊甲線至巳令戊巳與戊乙等末截甲乙于庚令甲庚與甲巳等即甲乙偕庚乙矩内形與甲庚上方形等為所求

論曰從庚作壬辛線與丁巳平行次作巳辛線與甲庚平行庚丙為甲乙乙庚矩内形巳庚為甲庚上方形巳壬為丁巳偕甲巳矩内形于巳壬增一

甲戊上方形必與等戊巳之戊乙上方形等本卷六戊乙上方形又與戊甲甲乙上兩方形并等是戊甲甲乙上兩方形并與巳壬及戊甲上方形并亦等矣次各減同用之戊甲上方形所存甲丙巳壬兩形不亦等乎再各減同用之甲壬形所存甲乙乙庚矩內形即庚丙形與甲庚上方形即巳庚形必相等此題所求即理分中末線詳六卷三十

十二題

三邊鈍角形其對鈍角邊上方形大于餘邊上兩方

形幷其較為鈍角旁任用一邊偕其引增線之與對角所下垂線相遇者矩內形二

解曰甲乙丙鈍角形乙為鈍角從餘角下一垂線與鈍角旁一邊丙乙引增線遇于丁為直角題言對鈍角之甲丙邊上方形大于甲乙乙丙兩邊上方形并其較為丙乙偕乙丁矩內形二

論曰丙丁線任分于乙即丙丁上方形與丙乙乙丁上兩方形及丙乙偕乙丁矩內形二并等本卷四

甲丙上方形與甲丁丙丁上兩方形并等即與甲丁乙丁丙乙上三方形及丙乙偕乙丁矩內形二并等也又甲乙上方形與甲丁乙丁上兩方形并等于甲乙上方形再增一丙乙上方形而與甲丙上方形較仍朒丙乙偕乙丁矩內形二也

十三題

三邊銳角形其對銳角邊上方形小于餘邊上兩方形并其較為銳角旁任用一邊偕其對角所下垂

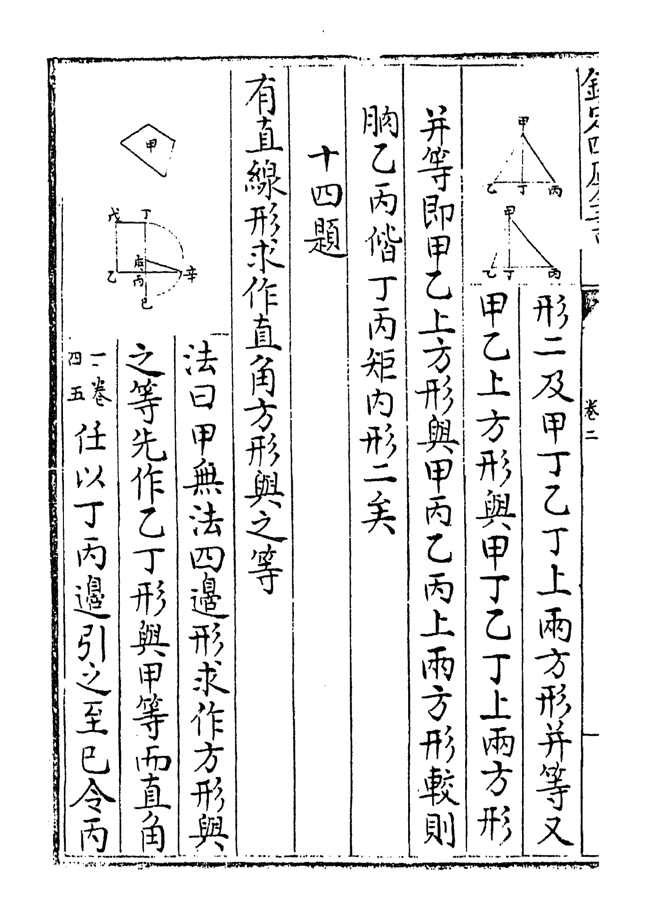
線旁之近銳角分線矩内形二

甲
乙　丁　丙

甲
乙　丁　丙

解曰甲乙丙銳角形從甲角向對邉乙丙下一垂線分乙丙于丁題言對丙銳角之甲乙邉上方形小于甲丙乙丙邉上兩方形并其較為乙丙偕丁丙矩内形二

論曰乙丙線任分于丁即乙丙及丁丙上兩方形并與乙丙偕丁丙矩内形二及乙丁上方形并等本卷七又甲丙上方形與甲丁丁丙上兩方形并等若甲丙乙丙上兩方形并必與乙丙偕丁丙矩内



形二及甲丁乙丁上兩方形并等又甲乙上方形與甲丁乙丁上兩方形并等即甲乙上方形與甲丙乙丙上兩方形較則朒乙丙偕丁丙矩內形二矣

十四題

有直線形求作直角方形與之等

法曰甲無法四邊形求作方形與之等先作乙丁形與甲等而直角任以丁丙邊引之至巳令丙

已與乙丙等次平分丁巳于庚其庚點若在丙則乙丁即是方形若在丙外即以庚為心丁為界作丁辛巳半圜末于乙丙線引長抵圜界于辛即丙辛上方形與甲等

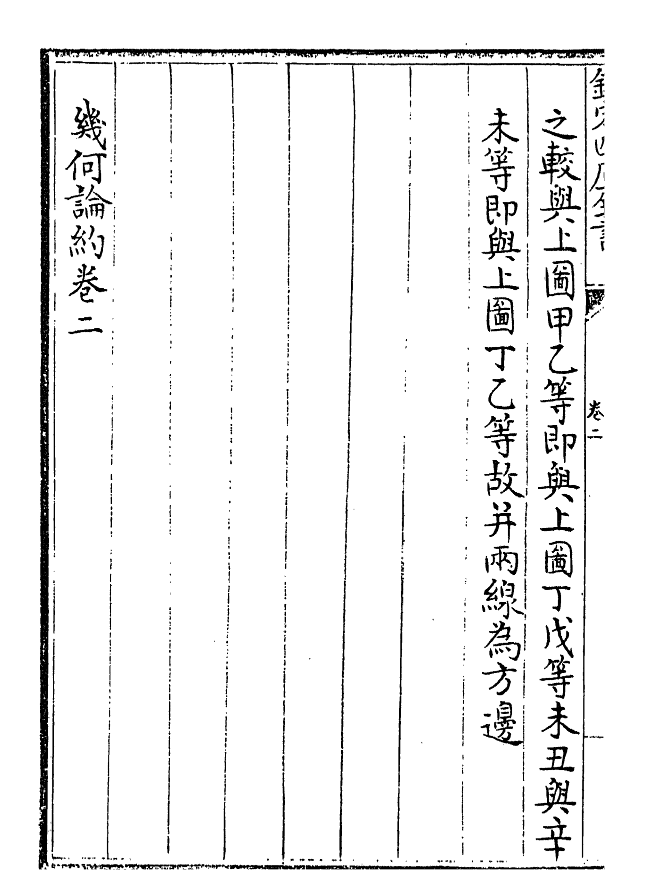
論曰自庚作庚辛線庚辛上方形與庚丙丙辛上兩方形并等又等庚辛之庚巳上方形與庚丙上方形及丁丙偕等丙乙之丙巳矩內形（即乙丁形）并等（本卷五）此二率每減去同用之庚丙上方形所存乙丁形與丙辛上方形安得不等

增題若先得方形之對角線所長于本形邊之較而求本形邊其較為甲乙先于甲乙上作甲丙方形次作乙丁對角線引長至戊令丁戊與甲乙等即得乙戊線為所求

論曰依乙戊線作戊庚方形次引乙甲線至己末作戊甲線其己甲丁己戊丁丙兩角必等（兩皆直角同減）去丁戊甲形所存己甲戊己戊甲兩角亦等角等則己甲己戊兩腰必等故乙己角線大于戊己邊

之較為甲乙

耕曰前論止言當然而未及所以然今補一論以明之另作辛壬為乙巳角線上方形次作癸子丑寅兩形皆與庚戊等錯綜加于辛壬方形之上重疊一丑子方形而缺辰巳卯午相等兩方形凡兩方形并與角線上一方形等一卷四七增則丑子一形必與兩缺形并等次作辛未為卯午缺形之角線而辛未上方形必亦與兩缺形并等則丑子形之未丑邊與辛未線必等夫午未為方邊小于角線



之較與上圖甲乙等即與上圖丁戊等末丑與辛未等即與上圖丁乙等故并兩線為方邊

幾何論約卷二